DE STANGPLANIMETER VAN P R Y T Z.

In 1886 vond de Deense kapitein Prytz de stangplanimeter uit, die in zijn meest eenvoudige vorm bestaat uit een tweemaal rechthoekig omgebogen staaf, waarvan het ene uiteinde toegespitst is tot een priem of stift, het andere uiteinde afgeplat is tot een wigvormige spatel of bijl en daarom ook wel bijlplanimeter wordt genoemd. Eenvoudiger constructie van een planimeter kan men zich moeilijk voorstellen. Het gebruik is dienovereenkomstig zeer gemakkelijk en de nauwkeurigheid voldoende voor het bepalen van afwaterende oppervlakken.

Eisen, waaraan bij de toepassing van de stangplanimeter moet worden voldaan:
Eerste eis: beweegt men de priem langs de omtrek van een op te meten figuur, dan moet de spatel ongestoord over het papieroppervlak kunnen schuiven.
Tweede eis: priem en spatel moeten in één vlak liggen.
Men controleert dit door de priem langs een rechte lijn te bewegen. De spatel moet dan die rechte lijn eveneens blijven volgen en mag er niet van af sporen.(de spatel mag dus niet "scheef" staan).
Derde eis: bij het gebruik van de stangplanimeter moet het door priem en spatel gedachte vlak loodrecht op het papieroppervlak staan, welk laatste horizontaal moet liggen.

Het gebruik van de stangplanimeter.
Men plaatst de planimeter in een nog nader aan te geven stand met de priem boven een punt van de omtrek van de op te meten figuur, drukt met de spatel voorzichtig een keepje in het papier, beweegt daarna de priem langs de omtrek, - zoals men dit gewoon is te doen met de stift van een rol- of schijfplanimeter -, tot men aan het punt van uitgang is teruggekomen, drukt ten tweede male een keepje in het papier en meet nu de afstand op in mm tussen de beide keepjes en vermenigvuldigt deze afstand met de lengte van de stang in dm(afstand tussen priem en midden-spatel), waarna men als resultaat krijgt het oppervlak van de betreffende figuur in cm^2.

(De demonstratie-planimeter, vervaardigd door de fotograaf-instrumentmaker Helling van onze dienst, heeft een lengte van precies 3 dm. De eenvoudige vermenigvuldigingsfactor 3 komt dus aan de berekening uit het hoofd van het product uit keepjesafstand en lengte ten goede). Een beter resultaat verkrijgt men door de gehele procedure te herhalen, maar nu met een stand van de stang diametraal ten opzichte van de eerste stand waarna men dan het gemiddelde van beide keepjes-afstanden moet nemen.

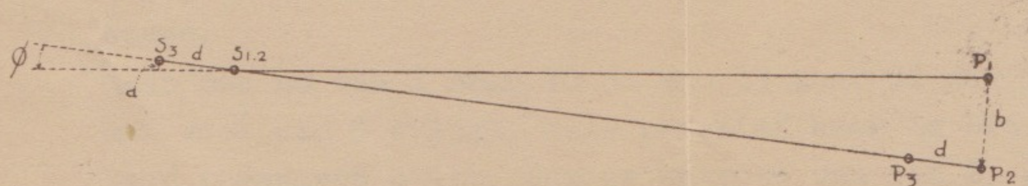
De formule luidt dus: $O = A.L$ of $\frac{A_1 + A_2}{2} . L$ en de dimensies zijn $(cm^2) = (mm).(dm)$.

Rekening houdende met de schaal van de kaart, kan dit bedrag aan cm^2 dan omgerekend worden tot ha.

Verklaring van de werking van de stangplanimeter:

Met de stang kunnen tweeërlei manipulaties worden uitgevoerd, n.l.: men kan de stang draaien om het middelpunt van de spatel en men kan de stang rechtlijnig voortschuiven evenwijdig aan zijn as. Men kan dus iedere door de priem afgelegde weg ontleed denken in een oneindig aantal boogjes b (met straal = L) afwisselend met radiaal gelegen rechte stukjes d. Hierbij beschrijft dan de spatel een curve, die opgebouwd wordt uit elementen, die gelijk en evenwijdig zijn aan d.

Gaat men nu na, hoever de spatel, wanneer de priem zo'n combinatie van boogje b en rechtstukje d heeft doorlopen, van zijn oorspronkelijke beginstand is af komen te liggen in loodrechte richting, dan laat de ondervolgende figuur zien, dat deze afstand $a = d \sin \emptyset$ is.



P = priem
S = spatel
1,2,3 = opvolgende standen van priem en spatel.

Algemeen is dus ook $a_n = d_n \sin \emptyset_n$.(1), waarbij d_n positief dan wel negatief gerekend wordt, al naar gelang d_n ontstaan is uit een beweging van het instrument in de richting van priem naar spatel toe dan wel omgekeerd.(In bovenstaande figuur dus positief, vanwege de beweging van rechts naar links).

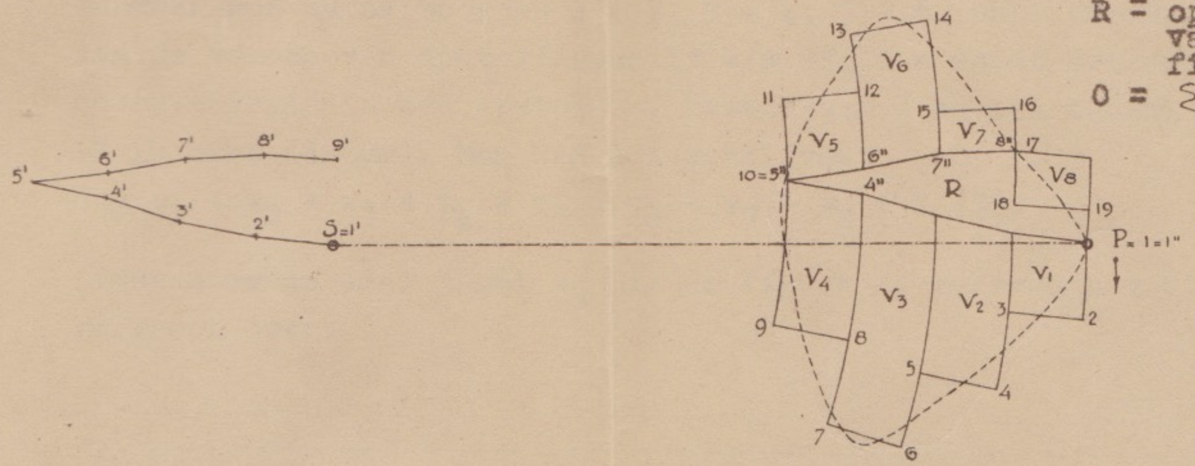
Beschouwen wij nu eens de volgende figuur:

PS = L

O = oppervlakte van de op te meten figuur.

R = oppervlakte van de restfiguur.

O = $\sum v$ + R.



Hierin stelt de met een streeplijn begrensde figuur het op te meten oppervlak O voor en P S de beginstand van de stangplanimeter met de priem in P en de spatel in S.
Beweegt men nu de priem volgens de wijzers van een klok, dus rechtsomgaande, langs de omtrek van de figuur volgens de gesloten veelhoek 1, 2, 3, 4, 5 enz., dan beschrijft de spatel de open veelhoek 1', 2', 3' enz.
Verschuift men nu de door de spatel gevormde curve evenwijdig aan de beginstand P S over een lengte L, zodat S met P samenvalt, dan snijdt deze figuur de omtrek van O in de punten 10 en 17. In deze punten ligt dus de as van de stang evenwijdig aan de oorspronkelijke beginstand.
Gaat men nu van 1 naar 10 en van 17 naar 18 dan zijn de waarden, die men voor sin Ø krijgt, alle positief(hoek in het eerste kwadrant).
Daar tegenover staat, dat de waarden van sin Ø, gaande van 10 naar 17 alle negatief moeten zijn(hoek in het vierde kwadrant).
Voorts zijn de door de spatel afgelegde wegstukken d positief gerekend van 1^1 tot 5^1 en negatief van 5^1 tot 9^1. Men vindt nu voor de totale afstand A(van 1^1 tot 9^1) waarover de spatel t.o.v. zijn beginstand is verschoven:

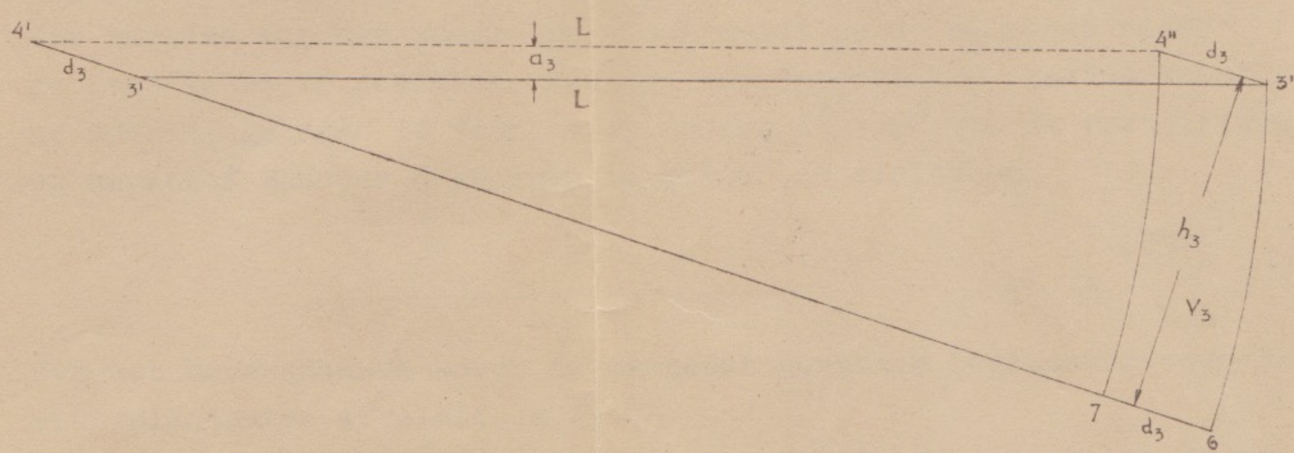
$A = d_1 \sin \emptyset_1 + d_2 \sin \emptyset_2 + d_3 \sin \emptyset_3 + d_4 \sin \emptyset_4 - d_5 \sin \emptyset_5 - d_6 \sin \emptyset_6 - d_7 \sin \emptyset_7 - d_8 \sin \emptyset_8.$

of: $A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_8$ (2).

Wanneer men nu de boogjes 1 - 2, 3 - 4, 5 - 6, enz. verlengt tot aan de verschoven spatelfiguur 1" t/m 9", dan wordt het oppervlak O onderverdeeld in een spatel- of restfiguur R en een aantal lamellen v (8 in onze figuur). Men kan dus schrijven:

$O = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - v_8 + R$ (3).

Lichten we nu eens lamel v_3 uit de figuur en tekenen hem hieronder vergroot over:



We zien dan dat deze lamel v_3 of 6 - 7 - 4" - 3", begrensd wordt door 2 cirkelbogen met gelijke straal L en door 2 gelijke en evenwijdige stukjes d_3.
Verbinden we nu nog de punten 3' 4' met 3" 4" door 2 evenwijdige lijnen ter lengte van L, dan kan de inhoud van dit zo gevormde parallelogram op twee manieren worden berekend, n.l. uit $a_3.L$, maar ook uit $d_3.h_3$. (4)
Bepalen we nu de oppervlakte van lamel v_3, welke men zich opgebouwd kan denken uit een oneindig aantal rechthoekjes met zijden d_3 en dh, dan kan men daarvoor schrijven:

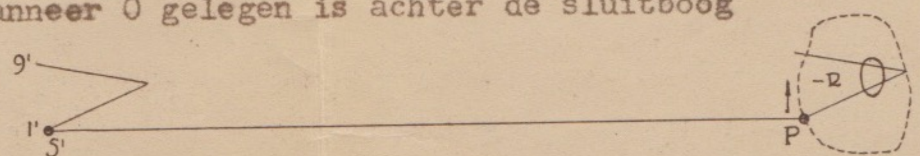
$$v_3 = \int_{h=0}^{h=h_3} d_3.dh = d_3.h_3 \qquad (5)$$

en dan ziet men dat de oppervlakte van deze lamel $d_3.h_3$ gelijk is

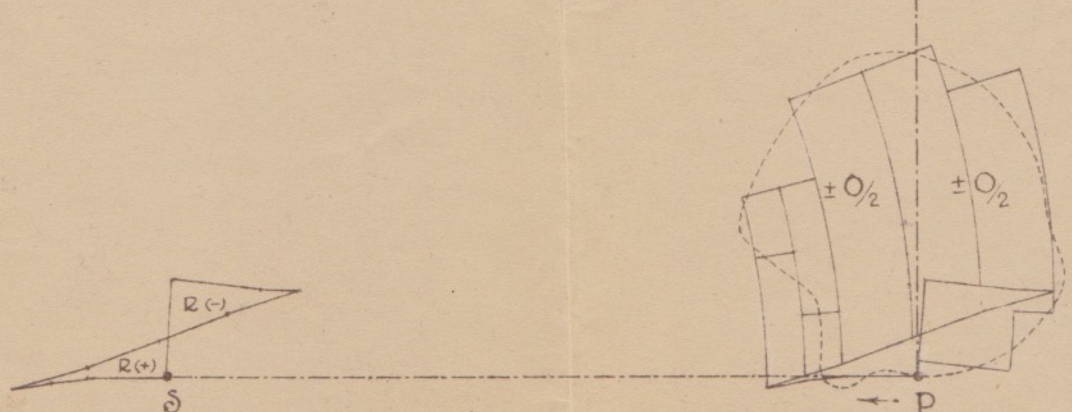
aan de oppervlakte van het parallelogram a_3. L. (6).
Algemeen is dan ook: $v_n = a_n . L$ (7) en we vinden dus nu voor het oppervlak O, wanneer we in vergelijking (3) de lamellen v_n vervangen door de producten $a_n . L$ en letten op de overeenkomst tussen de tekens in de vergelijkingen(2) en (3):

$$\underline{\underline{O = A.L + R}} \qquad (8)$$

Of in woorden: op een kleine restfiguur R na, kan de oppervlakte van een figuur O worden voorgesteld door het product van de afstand A tussen begin- en eindstand van de spatel en de lengte L van de stang.
Grootte en voorteken van R hangen af van de gekozen beginstand.
Ten aanzien van het voorteken van R geldt nu de volgende regel: de restfiguur is positief, wanneer het oppervlak O, gezien vanaf de spatel, gelegen is vóór de sluitboog $1^1 - 9^1$ van de spatelfiguur en negatief wanneer O gelegen is achter de sluitboog



Uit het bovenstaande wordt nu de meest gunstige beginstand voor de stangplanimeter afgeleid, n.l.:
stel de stang met de priem boven een punt van de omtrek van de op te meten figuur zodanig op, dat een loodlijn door de priempunt, gedacht op het vlak, gaande door priem en spatel, het op te meten oppervlak ongeveer halveert.
Men krijgt dan een positieve en een negatieve restfiguur $R_{(+)}$ en $R_{(-)}$ en vindt voor $O = A.L + R_{(+)} - R_{(-)}$, waarbij $R_{(+)} - R_{(-)}$ te verwaarlozen klein is ten opzichte van O.



In de practijk mete men geen grotere oppervlakken met de stangplanimeter op, waarvan de gemiddelde diameter > 1/3 L is.(Zijnde te meten oppervlakken groter, dan legge men er een vierkanten net overheen en mete de reststukken met de stangplanimeter).

Literatuur: J.Hamann "Zeitschrift für Vermessungswesen"
Seite 643, Heft 21, Band XXV, 1896.

N.B. Hamann geeft de te bereiken nauwkeurigheid met 0,5% - 1% aan.

Utrecht, October 1948.

Ir F.van Schagen.