

De logaritme van John Napier**Simon van der Salm****(Lezing bijeenkomst KRING, Zoetermeer, 18 november 2023)****De Descriptio**

In 1614 publiceerde de Schotse theoloog en wiskundige John Napier de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, met een logaritmetafel voor trigonometrische grootheden. De tafel betreft opmerkelijk goede numerieke benaderingen van de *exacte Napier-logarithmen* van de Sinus, Cosinus en Tangens (hoofdletters), van hoeken in het eerste kwadrant van een cirkel met straal $R = 10^7$ eenheden, waarbij de cirkelboog verdeeld is in $90 \times 60 = 5400$ minuten. Zie figuur 1. De calculatiemethode die Napier gebruikte, leidde na 20 jaar rekenen tot een logaritmetafel voor trigonometrische grootheden, waarvan tabel 1 de eerste bladzijde toont.

De Constructio

In 1619 gaven zijn zoon Robert Napier en de Londense wiskundige Henry Briggs postuum de *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* uit, met aantekeningen waarin Napier de tamelijk complexe wiskundige achtergrond van zijn berekeningsmethode verklaarde.



Die gedetailleerde beschrijving had Napier al enige jaren vóór de publicatie van de *Descriptio* samengesteld, maar nooit gepubliceerd. Zie [1], p. xvi.

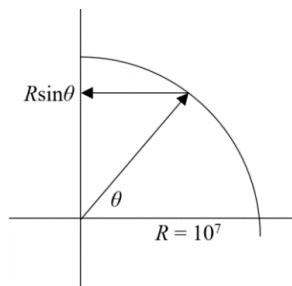


Fig. 1. De kwartcirkel van Napier. In de tijd van Napier verstond men onder de Sinus (hoofdletter) van een hoek, de hedendaagse sinus (getal tussen 0 en 1), vermenigvuldigd met de straal R van de cirkel die op dat moment relevant was. Rond 1600 vatte men trigonometrische grootheden dus niet zozeer op als verhoudingen, maar als lengten. Napier kiest de straal R gelijk aan 10^7 , opdat zijn sinussen 7 significante cijfers voor de decimale komma kunnen hebben, om zo voldoende nauwkeurigheid te kunnen garanderen. Zie [1], p. 8.

Wie was John Napier?

Napier, *Ioannes Neper*, werd in 1550 geboren in het Merchiston Castle, Edinburgh, De Napiers behoorden tot de oudste Schotse adel; de stamboom van John gaat terug tot 1068. Zie [11], p. 5 e.v., en zie figuren 2 en 3. John werd geboren tijdens de Reformatie in Schotland, waar toen een hevige strijd woedde tussen Protestanten en Katholieken. Zijn familie was Protestants geworden en John was zeer religieus.

In 1563 begon hij aan een studie theologie aan de St. Andrews University, maar brak die, om onduidelijke redenen, al na een jaar af. In 1564 begon hij aan een - in die tijd avontuurlijke en gevaarlijke - reis op het vasteland van Europa. Het is onbekend wat hij daar precies zocht, maar men vermoedt dat

hij onder andere in Genève theologie studeerde. Zie [11], p. 18. In 1571 kwam hij terug in Schotland, trouwde en werd landgoedeigenaar, de 8^e Laird van Merchiston, bij Edinburgh.

In 1593 publiceerde hij *The Plain Discovery of the whole Revelation of Saint John*. Een belangrijke conclusie die hij trok was: “De Paus is de Antichrist”. Het boek werd een groot succes in Protestants Europa. Napier beschouwde dat als zijn belangrijkste werk, en niet zijn ontdekking van een nieuw type logaritme. Wiskunde lijkt niet veel meer dan een interessante hobby voor Napier te zijn geweest.



Fig. 2. John Napier (1550 – 1617), Lord van Merchiston bij Edinburgh, Schotland. Portrait dated 1616; presented to the University of Edinburgh by his great granddaughter Margaret, who became Baroness Napier in 1686. Artist unknown. Source Wikipedia.org.

Napier overleed in 1617, nog voor de publicatie van de *Rabdologiae*, het boek over zijn rekenstaafjes. Ook postuum werd in 1619 de *Constructio* gepubliceerd, onder andere door medewerking van Briggs.

MacDonald en Havil

We reconstrueren in dit artikel de logaritmetafel in de *Descriptio* aan de hand van de nog altijd zeer leesbare Engelstalige versie van de *Constructio*, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, uit 1889, een vertaling door William Rae MacDonald [1].

Bijzonder in dit verband is de biografie *John Napier, Life, Logarithms and Legacy*, door Julian Havil. Zie Havil (2014), [2]. Dat is niet alleen een historische biografie, ook Napier's wiskundige werk wordt door Havil uitvoerig en deskundig besproken. Havil baseert zich eveneens op het werk van Macdonald.

| Deg. 0 | | + - | | Logarith. | | Sines | |
|--------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|--|
| mi | Sines | Logarith. | Differen. | Logarith. | Sines | | |
| 0 | 0 | infinite. | infinite. | .0 | 1000000.0 | 60 | |
| 1 | 291 | 8142567 | 8142568 | .1 | 1000000.0 | 59 | |
| 2 | 582 | 7449419 | 7449421 | .2 | 999999.8 | 58 | |
| 3 | 873 | 7043952 | 7043956 | .4 | 999999.6 | 57 | |
| 4 | 1164 | 6756274 | 6756274 | .7 | 999999.3 | 56 | |
| 5 | 1454 | 6533131 | 6533130 | 1.1 | 999998.9 | 55 | |
| 6 | 1745 | 6350810 | 6350808 | 1.6 | 999998.6 | 54 | |
| 7 | 2036 | 6196659 | 6196657 | 2.2 | 999998.0 | 53 | |
| 8 | 2327 | 6063128 | 6063126 | 2.8 | 999997.4 | 52 | |
| 9 | 2618 | 5945345 | 5945342 | 3.5 | 999996.7 | 51 | |
| 10 | 2909 | 5839986 | 5839814 | 4.3 | 999995.9 | 50 | |
| 11 | 3200 | 5744676 | 5744671 | 5.2 | 999995.0 | 49 | |
| 12 | 3491 | 5657665 | 5657615 | 6.2 | 999994.0 | 48 | |
| 13 | 3781 | 5577622 | 5577615 | 7.3 | 999992.8 | 47 | |
| 14 | 4072 | 5513514 | 5503506 | 8.4 | 999991.7 | 46 | |
| 15 | 4363 | 5434522 | 5434513 | 9.6 | 999990.5 | 45 | |
| 16 | 4654 | 5369984 | 5369973 | 10.9 | 999989.2 | 44 | |
| 17 | 4945 | 5309360 | 5309148 | 12.3 | 999987.8 | 43 | |
| 18 | 5236 | 5252202 | 5252188 | 13.8 | 999986.3 | 42 | |
| 19 | 5527 | 5198136 | 5198120 | 15.4 | 999984.7 | 41 | |
| 20 | 5818 | 5146843 | 5146836 | 17.0 | 999983.1 | 40 | |
| 21 | 6109 | 5098054 | 5098045 | 18.7 | 999981.3 | 39 | |
| 22 | 6399 | 5051534 | 5051514 | 20.5 | 999979.6 | 38 | |
| 23 | 6690 | 5007083 | 5007060 | 22.4 | 999977.6 | 37 | |
| 24 | 6981 | 4964524 | 4964499 | 24.4 | 999975.6 | 36 | |
| 25 | 7272 | 4923703 | 4923676 | 26.5 | 999973.6 | 35 | |
| 26 | 7563 | 4884483 | 4884454 | 28.7 | 999971.4 | 34 | |
| 27 | 7854 | 4846743 | 4846712 | 30.9 | 999969.2 | 33 | |
| 28 | 8145 | 4810376 | 4810343 | 33.2 | 999966.8 | 32 | |
| 29 | 8436 | 4775286 | 4775250 | 35.6 | 999964.4 | 31 | |
| 30 | 8726 | 4741385 | 4741347 | 38.1 | 999961.9 | 30 | |

Deg. 89

| Deg. 0 | | + - | | Logarith. | | Sines | |
|--------|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|--|
| mi | Sines | Logarith. | Differen. | Logarith. | Sines | | |
| 30 | 8726 | 4741385 | 4741347 | 38.1 | 999961.9 | 30 | |
| 31 | 9017 | 4708596 | 4708555 | 40.7 | 999959.3 | 29 | |
| 32 | 9308 | 4676848 | 4676805 | 43.4 | 999956.6 | 28 | |
| 33 | 9599 | 4646077 | 4646031 | 46.1 | 999953.9 | 27 | |
| 34 | 9890 | 4616225 | 4616176 | 48.9 | 999951.1 | 26 | |
| 35 | 10181 | 4587239 | 4587187 | 51.8 | 999948.2 | 25 | |
| 36 | 10472 | 4559069 | 4559014 | 54.8 | 999945.2 | 24 | |
| 37 | 10763 | 4531671 | 4531613 | 57.9 | 999942.1 | 23 | |
| 38 | 11054 | 4505004 | 4504943 | 61.1 | 999938.9 | 22 | |
| 39 | 11344 | 4479030 | 4478965 | 64.4 | 999935.7 | 21 | |
| 40 | 11635 | 4453713 | 4453645 | 67.7 | 999932.3 | 20 | |
| 41 | 11926 | 4429022 | 4428950 | 71.1 | 999928.9 | 19 | |
| 42 | 12217 | 4404925 | 4404850 | 74.6 | 999925.4 | 18 | |
| 43 | 12508 | 4381396 | 4381318 | 78.2 | 999921.8 | 17 | |
| 44 | 12799 | 4358408 | 4358326 | 81.9 | 999918.1 | 16 | |
| 45 | 13090 | 4335936 | 4335850 | 85.7 | 999914.3 | 15 | |
| 46 | 13380 | 4313958 | 4313868 | 89.6 | 999910.5 | 14 | |
| 47 | 13671 | 4292453 | 4292360 | 93.5 | 999906.5 | 13 | |
| 48 | 13962 | 4271401 | 4271304 | 97.5 | 999902.5 | 12 | |
| 49 | 14253 | 4250783 | 4250682 | 101.6 | 999898.4 | 11 | |
| 50 | 14544 | 4230583 | 4230477 | 105.8 | 999894.2 | 10 | |
| 51 | 14835 | 4210781 | 4210671 | 110.1 | 999890.0 | 9 | |
| 52 | 15126 | 4191364 | 4191250 | 114.5 | 999885.6 | 8 | |
| 53 | 15416 | 4172317 | 4172198 | 118.9 | 999881.1 | 7 | |
| 54 | 15707 | 4153627 | 4153504 | 123.4 | 999876.6 | 6 | |
| 55 | 15998 | 4135279 | 4135151 | 128.0 | 999872.0 | 5 | |
| 56 | 16289 | 4117263 | 4117130 | 132.7 | 999867.3 | 4 | |
| 57 | 16580 | 4100664 | 4100527 | 137.5 | 999862.5 | 3 | |
| 58 | 16871 | 4082175 | 4082032 | 142.4 | 999857.7 | 2 | |
| 59 | 17162 | 4065082 | 4064935 | 147.3 | 999852.7 | 1 | |
| 60 | 17452 | 4048276 | 4048124 | 152.3 | 999847.7 | 0 | |

Deg. 89

Tabel. 1. Eerste bladzijde uit de logaritmetafel van Napier uit 1614. In de linker kolom lopen de hoeken van 0°0' tot en met 0°60' = 1° van boven naar beneden. In de rechter kolom lopen de complementaire hoeken van 89°0' tot en met 89°60' = 90° van beneden naar boven. De linker Sinus-kolom lees je dus van boven naar beneden; de rechter Sinus-kolom van beneden naar boven.



Fig. 3. Merchiston Castle in 1829.

Een wiskundeboek zonder formules

Toen Napier aan het begin van de 17^e eeuw zijn *Constructio* schreef was er nog geen analytische meetkunde en infinitesimaalrekening beschikbaar om zijn diepzinnige, mathematische ideeën over een continu-variabele grootte mee uit te drukken. *La Géométrie* van Descartes verscheen pas in 1637; de differentiaal- en integraalrekening (fluxierekening, infinitesimaalrekening) heeft zijn oorsprong in een lang artikel van Leibniz in *Acta Eruditorum* uit 1664, en Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* verscheen pas in 1687.

Wie de *Constructio* openslaat, ziet (zoals voor die tijd niet ongebruikelijk was) een wiskundeboek zonder formules. Wel zien we enkele tekeningen met lijnen die we tegenwoordig getallenlijnen (-assen) zouden noemen, maar die voor Napier dragers waren voor continu in lengte veranderende lijnstukken en niet van getallen.

Het coördinaatbegrip was nog onbekend. Zijn wiskunde is voornamelijk Euclidisch-meetekundig van

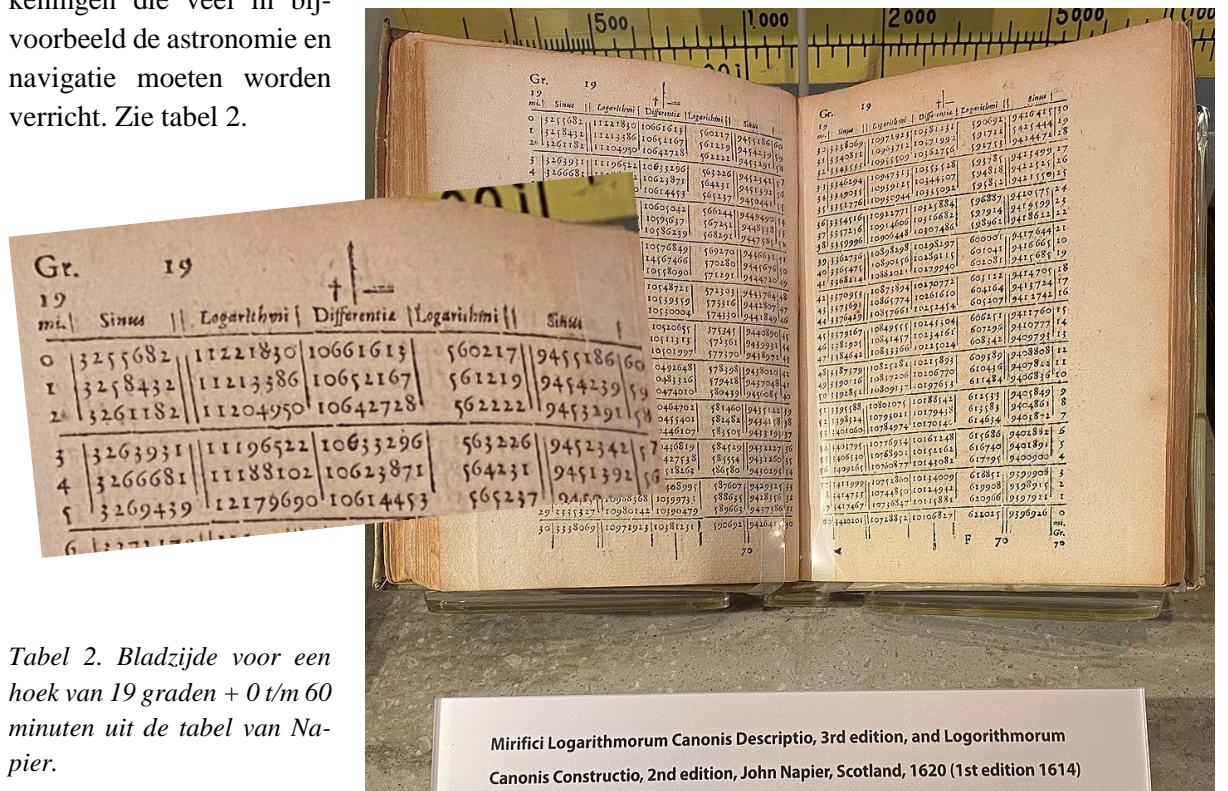
karakter. Al zijn wiskundige beschrijvingen zijn talig, wat van de hedendaagse lezer van de *Constructio* de nodige inspanning vraagt.

In de eerste paragraaf van de *Constructio* lezen we: “it (= the *Logarithmic Table*) picked out from numbers progressing in *continuous proportion*”. Dat voor elkaar krijgen zonder de latere continuïteitswiskunde die wij tegenwoordig gebruiken, is een bewonderingswaardige prestatie.

In dit artikel gebruiken we analytisch gereedschap dat pas ver na het leven van Napier werd ontwikkeld en dat hij niet heeft gekend, maar waarvan hij wel een intuïtief vermoeden moet hebben gehad.

Diverse logaritmetafels

Het berekenen van logaritmen, aan het einde van de 16^e en het begin van de 17^e eeuw, was een tour-de-force. Napier publiceerde als eerste een logaritmetafel (1614), specifiek voor trigonometrische berekeningen die veel in bijvoorbeeld de astronomie en navigatie moeten worden verricht. Zie tabel 2.



Tabel 2. Bladzijde voor een hoek van 19 graden + 0 t/m 60 minuten uit de tabel van Napier.

Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, 3rd edition, and Logarithmorum Canonis Constructio, 2nd edition, John Napier, Scotland, 1620 (1st edition 1614)

Briggs baseerde zijn algemener toepasbare (echter onvolledig gebleven) logaritmetafel op het continuïteits-idee van Napier, maar hield het na meer dan een jaar rekenen voor gezien (1617).

Ezechiël De Decker en Adriaan Vlacq

De Nederlanders *Ezechiël de Decker* (1603/1604-1646/47), landmeter en docent meetkunde en rekenkunde, en *Adriaen Vlacq* (1600-1667), astronoom, wiskundige en uitgever, maakten die tafel in circa 10 jaar af (1626/1627). Zie Van Poelje, (2005) [7] en Van der Zijden, (2000) [8].

In 1628 publiceerde Vlacq zijn *Arithmetica logarithmica*. Een internationale bestseller! Behoudens verbeteringen van rekenfouten is hun tafel 350 jaar lang de basis geweest van veel andere logaritmetafels. Merkwaardig is het daarom dat men hun (wel complete) versie altijd *Briggse* logaritmetafel is blijven noemen.

Wie de tafel van Napier openslaat voor dezelfde hoek in graden (19 graden, zoals in tabel 2), ziet dat de waarden van de logaritmen van Napier sterk verschillen van de waarden die we in modernere tafels zien. Zie tabel 3. Wat betekent dat verschil?

Tabel 3. Bladzijde voor een hoek van 19 graden uit een tabel van Noordhoff.

Een Neperiaanse logaritme?

In sommige tabellenboeken wordt de natuurlijke logaritme, de *neperiaanse logaritme* genoemd. Zie bijvoorbeeld het militaire tabellenboek [3].

Die benaming vinden we ook, zij het zeldzamer, in de elektrotechniek. Elektronici die werken met transmissielijnen, hanteren de *Neper* als alternatief voor de decibel: voor twee veldgrootheden geldt met de Briggse logaritme

$$D = 20 \log \frac{X_1}{X_2} \text{ dB}$$

en met de natuurlijke logaritme $N = \ln \frac{X_1}{X_2} \text{ Np}$. De po-

tentiaalverzwakking van een signaal in een telefoonkabel bijvoorbeeld, is een aantal Np/km. Zie [4].

Vergeleken met de dB wordt de *Neper* nauwelijks meer gebruikt. Dat is opmerkelijk omdat zoveel fenomenen in de elektrotechniek met *e*-machten

beschreven worden. Zo is bijvoorbeeld het potentiaalverval langs een transmissiekabel als functie van de lengte L gelijk aan $V_L = V_{in} \exp(-\alpha L) \rightarrow \alpha L = \ln \frac{V_{in}}{V_L}$. Door de verzwakkingscoëfficiënt α in Np/km uit

te drukken, vermijd je een extra rekenstap die je bij dB's wel moet doen. We zien hier een verband tussen de natuurlijke logaritme en *Napier* maar dat is historisch merkwaardig. Napier was één van de ontdekkers van logaritmen. Hij bedacht zelfs het woord *logaritme* (= logos arithmos = ratio- of verhoudingsgetal). En Napier was de samensteller van de tweede, maar als eerste gepubliceerde, logaritmetafel. Echter, hij was zeker niet de bedenker van de natuurlijke logaritme. Die werd pas lang na zijn dood (1617) ontdekt. De Fransen noemen de natuurlijk logaritme zelfs *logarithme népérien*, een aardige, maar historisch foute benaming voor de afkorting ln. De ontrechte benaming *neperiaanse logaritme* doet niettemin vermoeden dat er toch een verband moet bestaan tussen de Napier-logaritme en de natuurlijke logaritme.

Het explosieve grondtal *e*

De natuurlijke logaritme (*logarithmus naturalis*) heeft ook een grondtal, namelijk $e = 2.71828\dots$, het transcendent grondtal van alle *exponentiële* groei, met $\ln e = 1$. Het is het grondtal dat de vijf basisconstanten van de wiskunde verenigt in de *vergelijking van Euler* $e^{i\pi} + 1 = 0$, een vergelijking die wiskundigen de mooiste uitdrukking vinden. We kunnen *e* het *explosieve grondtal* noemen: Euler introduceerde het immers in een manuscript over kanonnen, de *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta*, geschreven in 1727/1728, meer dan 100 jaar na de dood van John Napier.

We zullen zien dat het getal e wel iets met de Napier-logaritme te maken heeft. Zonder zich dat te realiseren had Napier bijna e ontdekt, maar e is *niet* het grondtal van de Napier-logaritme.

Een logaritme zonder de logaritme-eigenschappen

De logaritme van Napier heeft zelfs niet de meest bekende eigenschappen die wij aan logaritmen toe-kennen. Dus het definitieregeltje, dat we allemaal op school leerden, $a^c = b \leftrightarrow \log_a b = c$, geldt niet voor de logaritme van Napier, evenals bijvoorbeeld $\log a + \log b = \log ab$. Maar de verhoudingsregel die voor Napier van fundamenteel belang was, namelijk

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \text{NapLog } a - \text{NapLog } b = \text{NapLog } c - \text{NapLog } d, \text{ is wel geldig.}$$

Aan deze formule ontleende Napier de benaming logaritme, *Logos Arithmos*, verhoudingsgetal.

De logaritme van Napier: twee punten in beweging

Napier stelde zich twee lijnen voor, één met een lijnstuk OX, waarvan de lengte $x = \text{Sin } \theta = R \sin \theta$ steeds kleiner wordt, naarmate θ kleiner wordt, en een tweede lijn met lijnstuk OL, met als lengte de (wat wij zo zullen noemen) *exacte* Napier-logaritme van x , namelijk $L(x)$, die steeds groter wordt naarmate x kleiner wordt. Zie figuur 4. De punten X en L bewegen dus tegen elkaar in.

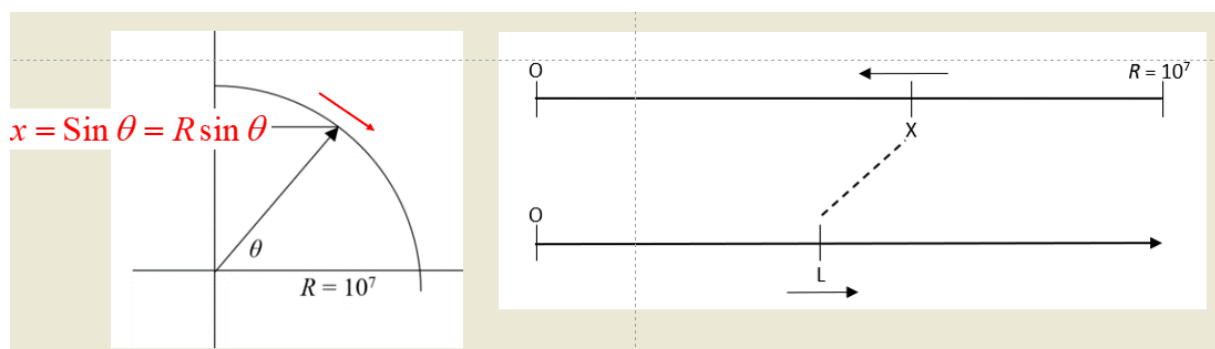


Fig. 4. Verband tussen $x = \text{Sin } \theta = R \sin \theta$ en de exacte Napier-logaritme L .

Het continue, exacte, kinematische model levert logaritmen per boogminuut van $x = \text{Sin } \theta = R \sin \theta$, voor hoeken $90^\circ 0' \geq \theta \geq 0^\circ 0'$ en straal $R = 10^7$. Napier zag een *continue* meetkundige rij voor zich. Wij zouden zeggen, een exponentiële functie. In de Engelse vertaling van de *Constructio* staat: “it is picked out from numbers progressing in *continuous* proportion”. Zie [1], p. 7.

Zie voor het volgende ook Van der Salm (1999) [9] en Havil (2014) [2], pp. 96 - 130.

Napier bedacht het volgende:

- 1) Er zijn twee lijnen waarlangs de punten X en L zich met verschillende snelheden voortbewegen.
- 2) Op de bovenste lijn doorloopt X het eindige interval OR met lengte $R = 10^7$; op de onderste lijn doorloopt L een halve rechte naar oneindig.
- 3) X start op de bovenste lijn in $x = R = 10^7$. Dat startpunt is de Sinus van 90° . Zijn beginsnelheid is $-R$ (m/s of vergelijkbare eenheid). X beweegt met *afnemende, negatieve snelheid*, in de richting van O, waarvoor $x = 0$. Als X naar links loopt, worden de hoeken θ steeds kleiner en worden dus ook de Sinussen $x = \text{Sin } \theta = R \sin \theta$ (= lengte van OX) steeds kleiner.
- 4) L, met afstand L tot O, doorloopt de onderste lijn, vanaf O ($L = 0$), met een *constante snelheid* van $+R$ (m/s of vergelijkbare eenheid), naar $L = \infty$.

- 5) Hoe meer X naar links ligt, des te kleiner is x , en des te groter is de bijbehorende, *exacte* Napier-logaritme $L(x)$.

Welk verband bestaat er tussen X en L ? Omdat X zich, op de positieve x -as OR, in de richting van O beweegt, is zijn snelheid negatief. Napier koos de snelheid van X gelijk aan de *negatieve* afstand $-x$. (De nogal lange uitleg van zijn motivatie hiervoor laten we hier achterwege)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -x \quad (1)$$

Op $t = 0$ is $v_x(0) = -R$ (m/s of vergelijkbare eenheid). Uit (1) volgt:

$$x = R \left(\frac{1}{e} \right)^t \quad (2)$$

De afstand x wordt kennelijk uitgedrukt (in onze moderne wiskunde) in een macht met grondtal $g = \frac{1}{e}$, vermenigvuldigd met $R = 10^7$. Formule (2) laat zien wat Napier bedoeld moet hebben met een *continue* meetkundige rij. (Wij zouden zeggen een exponentiële functie).

Formule (2) bevat nog de tijd t , die verder niet nodig is. Die kunnen we als volgt elimineren. Het verband (2) tussen t en x is ook:

$$t = \ln \frac{R}{x} \quad (3)$$

Tegelijkertijd met X start L in O op de onderste lijn met net zo grote, maar *positieve* aanvangssnelheid $R = +10^7$ (m/s of vergelijkbare eenheid). In tegenstelling tot X beweegt L met een *constante* momentane snelheid. Op het moment t heeft L daarom afgelegd de lengte:

$$L = R t \leftrightarrow t = \frac{L}{R} \quad (4)$$

Formules voor de Napier-logaritme

De formules van de *exacte* Napier-logaritme zijn dus:

$$\begin{cases} x(L) = R \left(\frac{1}{e} \right)^{L/R} \\ \text{NapLog}(x) = L(x) = -R \ln \frac{R}{x} = R \cdot \log_{1/e} \left(\frac{x}{R} \right) \end{cases} \quad (5)$$

Het berekenen van de Napier-logarithmen aan de hand van formule (5) is met Excel een koud kunstje. Zie de tabelbladzijde in tabel 4. Het is bijna niet te geloven dat Napier dat werk met pen en op papier, zonder enig rekenhulpmiddel, produceerde, terwijl hij bovendien niet over het moderne wiskundige formularium beschikte.

Napier berekende de numerieke benaderingen van de exacte logarithmen op een geheel andere wijze, namelijk door een koppeling van een meetkundige rij en een rekenkundige rij. Zie Donners, (2002) [5]. Maar hierboven wordt wel het fundamentele idee van zijn logarithmeconstructie getoond. Dit alles is zeer verbazingwekkend, zoals blijkt uit het volgende citaat:

No previous work had led up to it, nothing had foreshadowed it or heralded its arrival. It stands isolated, breaking upon human thought abruptly, without borrowing from the works of other intellects or following known lines of mathematical thought.

Lord Moulton, tijdens de conferentie over het 400-jarige bestaan van de Logaritme van Napier, Edinburgh 1914*.

*Lynne Gladstone-Millar: *John Napier, Logarithm John*, (2013), [11], p. 42.

| Degr | Min | Sin | Log | plus/min | Log | Sin | | | Min | Sin | Log | plus/min | Log | Sin | |
|------|-----|---------|----------|----------|--------|---------|-----|--|-----|---------|----------|----------|--------|---------|-----|
| 19 | 0 | 3255682 | 11221835 | 10661617 | 560217 | 9455186 | 60 | | 30 | 3338069 | 10971927 | 10381235 | 590692 | 9426415 | 30 |
| | 1 | 3258432 | 11213391 | 10652171 | 561220 | 9454238 | 59 | | 31 | 3340810 | 10963717 | 10371994 | 591723 | 9425444 | 29 |
| | 2 | 3261182 | 11204954 | 10642732 | 562223 | 9453290 | 58 | | 32 | 3343552 | 10955514 | 10362759 | 592755 | 9424471 | 28 |
| | 3 | 3263932 | 11196526 | 10633300 | 563227 | 9452341 | 57 | | 33 | 3346293 | 10947318 | 10353531 | 593787 | 9423498 | 27 |
| | 4 | 3266681 | 11188106 | 10623875 | 564231 | 9451391 | 56 | | 34 | 3349034 | 10939130 | 10344310 | 594820 | 9422525 | 26 |
| | 5 | 3269430 | 11179694 | 10614457 | 565237 | 9450441 | 55 | | 35 | 3351775 | 10930950 | 10335095 | 595855 | 9421550 | 25 |
| | 6 | 3272179 | 11171290 | 10605046 | 566244 | 9449489 | 54 | | 36 | 3354516 | 10922777 | 10325887 | 596890 | 9420575 | 24 |
| | 7 | 3274928 | 11162893 | 10595641 | 567252 | 9448537 | 53 | | 37 | 3357256 | 10914612 | 10316685 | 597926 | 9419598 | 23 |
| | 8 | 3277676 | 11154505 | 10586244 | 568261 | 9447584 | 52 | | 38 | 3359996 | 10906454 | 10307490 | 598964 | 9418621 | 22 |
| | 9 | 3280424 | 11146124 | 10576854 | 569270 | 9446630 | 51 | | 39 | 3362735 | 10898303 | 10298301 | 600002 | 9417644 | 21 |
| | 10 | 3283172 | 11137751 | 10567471 | 570281 | 9445675 | 50 | | 40 | 3365475 | 10890161 | 10289120 | 601041 | 9416665 | 20 |
| | 11 | 3285919 | 11129386 | 10558094 | 571292 | 9444720 | 49 | | 41 | 3368214 | 10882025 | 10279944 | 602081 | 9415686 | 19 |
| | 12 | 3288666 | 11121029 | 10548724 | 572305 | 9443764 | 48 | | 42 | 3370953 | 10873897 | 10270775 | 603122 | 9414705 | 18 |
| | 13 | 3291413 | 11112680 | 10539362 | 573318 | 9442807 | 47 | | 43 | 3373691 | 10865777 | 10261613 | 604164 | 9413724 | 17 |
| | 14 | 3294160 | 11104339 | 10530006 | 574333 | 9441849 | 46 | | 44 | 3376429 | 10857664 | 10252457 | 605207 | 9412743 | 16 |
| | 15 | 3296906 | 11096005 | 10520657 | 575348 | 9440890 | 45 | | 45 | 3379167 | 10849558 | 10243307 | 606251 | 9411760 | 15 |
| | 16 | 3299653 | 11087679 | 10511315 | 576364 | 9439931 | 44 | | 46 | 3381905 | 10841460 | 10234164 | 607296 | 9410777 | 14 |
| | 17 | 3302398 | 11079361 | 10501979 | 577382 | 9438971 | 43 | | 47 | 3384642 | 10833369 | 10225207 | 608342 | 9409793 | 13 |
| | 18 | 3305144 | 11071051 | 10492651 | 578400 | 9438010 | 42 | | 48 | 3387379 | 10825286 | 10215897 | 609389 | 9408808 | 12 |
| | 19 | 3307889 | 11062748 | 10483329 | 579419 | 9437048 | 41 | | 49 | 3390116 | 10817210 | 10206773 | 610436 | 9407822 | 11 |
| | 20 | 3310634 | 11054453 | 10474014 | 580439 | 9436085 | 40 | | 50 | 3392852 | 10809141 | 10197656 | 611485 | 9406835 | 10 |
| | 21 | 3313379 | 11046166 | 10464706 | 581460 | 9435122 | 39 | | 51 | 3395589 | 10801080 | 10188545 | 612535 | 9405848 | 9 |
| | 22 | 3316123 | 11037887 | 10455404 | 582482 | 9434157 | 38 | | 52 | 3398325 | 10793026 | 10179440 | 613585 | 9404860 | 8 |
| | 23 | 3318867 | 11029615 | 10446110 | 583505 | 9433192 | 37 | | 53 | 3401060 | 10784979 | 10170342 | 614637 | 9403871 | 7 |
| | 24 | 3321611 | 11021351 | 10436822 | 584529 | 9432227 | 36 | | 54 | 3403796 | 10776940 | 10161250 | 615689 | 9402881 | 6 |
| | 25 | 3324355 | 11013095 | 10427541 | 585554 | 9431260 | 35 | | 55 | 3406531 | 10768908 | 10152165 | 616743 | 9401891 | 5 |
| | 26 | 3327098 | 11004846 | 10418266 | 586580 | 9430293 | 34 | | 56 | 3409265 | 10760883 | 10143086 | 617797 | 9400899 | 4 |
| | 27 | 3329841 | 10996605 | 10408998 | 587606 | 9429324 | 33 | | 57 | 3412000 | 10752865 | 10134013 | 618853 | 9399907 | 3 |
| | 28 | 3332584 | 10988371 | 10399737 | 588634 | 9428355 | 32 | | 58 | 3414734 | 10744855 | 10124946 | 619909 | 9398914 | 2 |
| | 29 | 3335326 | 10980145 | 10390483 | 589663 | 9427386 | 31 | | 59 | 3417468 | 10736852 | 10115886 | 620966 | 9397921 | 1 |
| | 30 | 3338069 | 10971927 | 10381235 | 590692 | 9426415 | 30 | | 60 | 3420201 | 10728856 | 10106832 | 622025 | 9396926 | 0 |
| | | | | | | | Min | | | | | | Degr | 70 | Min |

Tabel 4. Tabelbladzijde met Napier-logaritmen voor de hoek van 19 graden, maar nu gegenereerd met Excel.

Conclusies

- Napier was met zijn wiskundig inzicht zijn tijd ver vooruit
- Is de bedenker van de decimale punt en moderne, decimale schrijfwijze van breuken
- Gebruikte feitelijk al analytische wiskunde die meer dan een eeuw later werd gevonden
- Gebruikte slimme interpolaties om zijn logaritmen daadwerkelijk te berekenen
- De logaritme van Napier is NIET de natuurlijk log.
- De logaritme van Napier is geen logaritme in moderne betekenis.
- Veel van de gebruikelijke rekenregels zijn niet toepasbaar op de Napier-logaritme
- Napier deed 20 jaar over het rekenwerk.

Referenties

[1] Napier, John, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, Alpha Edition, 2020. Reprint van de Engelse vertaling door William Rae MacDonald uit 1889, van de *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619/1620).

[1a] De oorspronkelijke Latijnse versie en de Engelse vertaling door MacDonald zijn op internet bij Google Books beschikbaar.

[2] Havil, J., *John Napier, Life, Logarithms and Legacy*, Princeton University Press, 2014.

[3] *Verzameling van Wiskundige Tafelen*, Koninklijke Militaire Academie, Breda, 1916.

[4] King, R.W.P., et al, *Transmission Lines, Antennas and Wave guides*, McGraw-Hill, 1945.

[5] Donners, J.H., *Mijnheer van Dalen krijgt Antwoord*, 2002.

[6] Weiss, Stephan, *Die proportionale Definition des Logarithmus*,

[Weiss-DefLogsProp-dt.pdf \(mechrech.info\)](#).

[7] Poelje, Otto E van, *Adriaen Vlacq and Ezechiël de Decker: Dutch Contribution to the Early Tables of Briggsian Logarithms*, Journal of the Oughtred Society Vol. 14. No. 1, 2005;

- [8] Zijden, Thomas van der, *Dutch Work on Logarithmic Tables by Adriaen Vlacq*, proceedings of the 6th International Meeting of Slide Rule Collectors, Ede, 2000.
- [9] Salm, Simon A.M. van der, *De logaritme van Napier*, Kring Historische Rekeninstrumenten, MIR 22, mei 1999, p. 15 t/m 20.
- [10] Denis Roegel, *Bürigi's Progress Tabulen (1620): logarithmic tables without logarithms*. [Research Report] 2010, inria-00543936
- [11] Gladstone-Millar, L., *John Napier, Logarithm John*, National Museums of Scotland, 2013.

Websites

- *1 Website <https://en.wikipedia.org/wiki/Neper>.
- *2 https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_sector.
- *3 <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/>