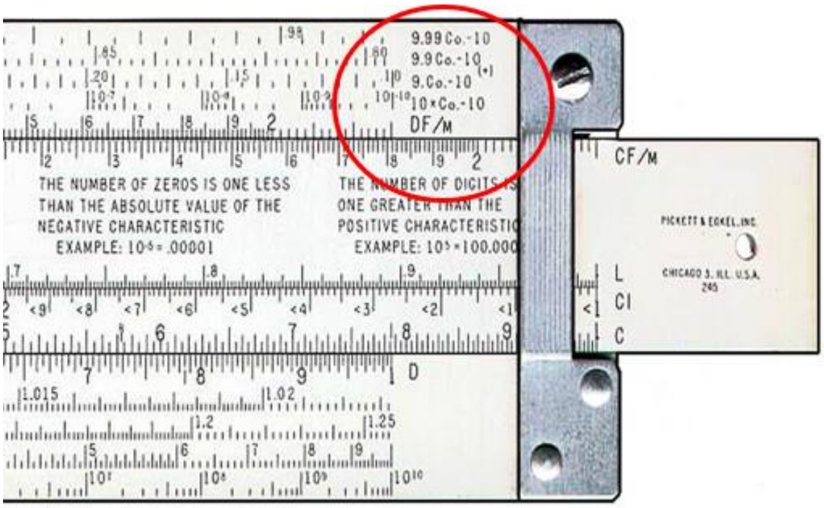
Cologaritmen en Pickett Co-schalen

Simon van der Salm

(Naar aanleiding van een discussie in de ISRG)

Op sommige rekenlinialen van Pickett, bijvoorbeeld de *Pickett Model 3 T Dual Base Log Log Reciprocal-Scale* (zie afb.1) hebben de vier 1/N-schalen (zie afb. 2) aan de rechterkant aan cologaritmen refererende aanduidingen 10*Co.–10, 9.Co.–1, 9.9Co.–10 en 9.99Co.–10.

Wat zijn cologaritmen? Wat betekenen die Co-aanduidingen bij de 1/N-schalen op sommige Pickett-linialen? En wat is het nut van cologaritmen?



Afb. 1. deail rechterhelft Pickett 3 T Dual Base Log Log Reciprocal-Scale, zie [1]

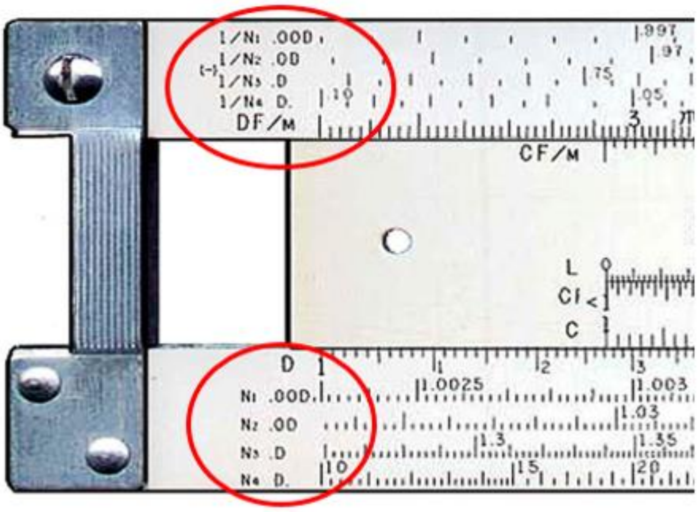
Cologaritmen

Onder de *cologaritme* (grondtal 10) van $x > 0$ verstaan we: $\text{colog x} = \log \frac{1}{x} = -\log x$. Het begrip *co-logaritme* is betrekkelijk onbekend. In geen van de mij bekende Nederlandse schoolboeken uit de eerste helft van de twintigste eeuw komt het begrip voor. Ook niet in de Nederlandse logaritmetabellen. De beroemde Abramowitz & Stegun [2] geeft weliswaar de definitie, maar laat in het midden hoe men cologaritmen kan gebruiken. Het Amerikaanse tabellenboek [3] laat zien dat cologaritmen gebruikt kunnen worden om het verschil van logaritmen om te zetten in een som.

Er geldt immers: $\log\frac{a}{b} = \log a + \log\frac{1}{b} = \log a + \operatorname{colog} b.$ Deze omzetting refereert aan de vraag hoe je handig negatieve logaritmen, dus logaritmen van getallen kleiner dan 1, kunt voorstellen. De Co-aanduidingen op de Pickett Model 2 en Model 3 verwijzen naar de complementaire wijze waarop negatieve logaritmen en cologaritmen kunnen worden voorgesteld.

N- en 1/N-schalen

Omdat de Co-aanduidingen te maken hebben met logaritmen van getallen kleiner dan 1, dus te maken hebben met negatieve logaritmen, staan ze vermeld bij de vier 1/N-schalen. Zie afb. 1 en de bovenste cirkel in afb. 2.



Afb. 2. Detail linkerhelft Model 3, zie [1]

Naast de eigenaardige Co-aanduidingen is het opmerkelijk dat Model 3 (hetzelfde geldt voor Model 2) geen LL-schalen voor het grondtal *e* heeft, maar voor het grondtal 10. Kennelijk was deze rekenliniaal bedoeld voor decimale berekeningen in niet-natuurwetenschappelijk toepassingen.

De dubbel-log-schalen van de Pickett Model 3 worden aangeduid met N1(vergelijkbaar met LL0) tot en met N4 (LL3) voor de machten van 10 groter dan 1 (positieve exponenten), en 1/N1 (LL00) tot en met 1/N4 (LL04) voor machten van 10 kleiner dan 1 (negatieve exponenten). De N-schalen hebben dezelfde functie als de gebruikelijke zwarte LL-schalen; de 1/N-schalen hebben dezelfde functie als de gebruikelijke rode LL-schalen. Merk op, dat juist deze vier 1/N-schalen rechts de Co-aanduidingen hebben. Zie nogmaals afb.1.

Zoals links onder in afb. 2 is te zien, is de ordinaat *N* op een N-schaal een exponentiële functie met grondtal 10 van een abscis *D* op D:

De logaritme op D van een getal *N* op N1, N2 of N3 is dus de mantisse van log *N* (wijzer = 0); de logaritme op D van een *N* op N4 bevat zowel de wijzer > 0 als de mantisse. De getallen *N* op N1, N2 en ook N3 liggen zo dicht bij 1 dat de mantissen van hun logaritmen met veel nullen beginnen. Bijvoorbeeld log 1,0025 = 0,001084. Hetzelfde geldt voor de getallen 1/*N* op de schalen 1/N1 tot en met 1/N4. Zo begint bijvoorbeeld log (0,9975) = -0,001084 ook met 3 nullen.

- N1 (LL0): $N = 10^{0,00D} \leftrightarrow \log N = \dfrac{D}{1000}$
- N2 (LL1): $N = 10^{0,0D} \leftrightarrow \log N = \dfrac{D}{100}$
- N3 (LL2): $N = 10^{0,D} \leftrightarrow \log N = \dfrac{D}{10}$
- N4 (LL3): $N = 10^{D} \leftrightarrow \log N = D$

Formulebox 1. Verbanden tussen de N-schalen en de D-schaal

De gebruiker van cologaritmen moet de nullen links in de mantisse goed voor ogen hebben. Pickett heeft zich dat gerealiseerd, gezien de Co-aanduidingen aan de rechterkant van de vier 1/N-schalen, en ook door nog extra vermeldingen over aantallen nullen op de schuif. Zie afb.1. Kennelijk was Pickett er niet gerust op dat de gebruiker het ongewone begrip *cologaritme* zonder uitleg zou begrijpen.

Negatieve logaritmen

Met de komst van elektronische rekenmachines is de notatie van een negatieve logaritme, zoals log (0,9975) = -0,001084, ingeburgerd geraakt, maar in het tijdperk van rekenlinialen en logaritmetafels werd een negatieve logaritme zo niet voorgesteld. Er werden verscheidene notaties gebruikt. Zo zien we bijvoorbeeld in [4] p. 38: $\log \sin 4° = \overline{2},84358,$ een notatie die we moeten we lezen als: 0,84358 – 2 en niet als –2,84358!

Vaak werd de 10-complementsvorm gebruikt: $\log \sin 4° = 8,84358 - 10.$ Ook het 1-complement: log(0,5) = ,69897 -1 (zonder 0 voor de komma) kwam voor.

1-complementen

In een logaritmetabel lezen we bijvoorbeeld $\log 2 = ,30103,$ dus $\log \tfrac{1}{2} = -,30103,$ maar deze schrijfwijze van negatieve logaritmen is, in relatie met logaritmetabellen en rekenlinialen, onhandig. Daar hebben we immers alleen positieve mantissen tot onze beschikking. Complementen geven antwoord op de vraag hoe je om kunt gaan met negatieve logaritmen terwijl je alleen de beschikking hebt over positieve mantissen.

Mantissen in tafels schrijven we met een vast aantal decimalen, na ,99999 volgt weer ,00000. Mantissen kunnen we daarom denken langs een cirkel, waarbij 1 samenvalt met 0. Een negatieve mantisse kunnen we op deze cirkel opvatten als het 1-complement van een positieve. Bijvoorbeeld $\log \tfrac{1}{2} = -,30103, = ,69897 - 1,$ dus een (positieve) mantisse minus 1.

Hierbij kunnen we een eenvoudig *trucje* toepassen. De mantisse in het 1-complement vinden we door ieder cijfer van 9 af te trekken, behalve het meest rechter cijfer, dat we van 10 aftrekken. Is het meest rechter cijfer 0, dan is het meest rechter cijfer in het 1-complement ook 0, en trekken we het op één na laatste cijfer van 10 af.

We schrijven hierbij bij voorkeur geen 0 voor de komma, omdat we deze leidende 0 niet moeten complementeren! Zo kunnen we bijvoorbeeld zonder rekenwerk of opzoeken in een tafel log (0,5) = ,69 897 - 1 schrijven. Of log(7,809) = ,89260 en dus log(1/7,809) = 0,10 740 - 1 (Merk op: deze mantissen eindigen met 0). We zien in dit laatste voorbeeld duidelijk dat de cologaritme en het 1-complement aan elkaar gekoppeld zijn. Immers: log(1/7,809) = colog(7,809) = 0,10 740 - 1.

10-complementen

Bij 1-complementen werken we uitsluitend met mantissen, dus getallen van 0 tot 1. Als we ook de wijzer mee willen meerekenen, kunnen we 10-complementen gebruiken. We schrijven dan bijvoorbeeld log (1/2) = –0,301 03 = 9,698 97 – 10. De notatie 10*Co-10 bij schaal 1/N4 duidt hierop.

Bij het 10-complement complementeren we *ook de 0* voor de komma! In de Amerikaanse notatie van decimale breuken laat men echter de 0 voor de decimale punt weg; in verband met het 10-complement een veel voorkomende bron van fouten, die de notaties bij de 1/N-schalen moeten voorkomen.

Cologaritme en 10-complement

We keren terug naar de Pickett rekenlinialen. De cologaritme van een getal kunnen we vinden door van de logaritme het 10-complement te bepalen volgens het hierboven beschreven trucje. Zie [5]. De aanduiding 10.Co.–10 bij de schaal 1/N4 herinnert ons aan dat feit. Willen we bijvoorbeeld de log van 0,05 op 1/N4 weten, dan lezen we 20 af op N4. De log van 20 is 1,30 op D. Het 10-complement van 1,30 is 8,70. De log van 0,05 is de colog van 20, dus 8,70 – 10.

Bij 1/N3 staat de aanduiding 9.Co.–10. Waarom? De berekening voor getallen op 1/N3 gaat immers op precies dezelfde wijze? Bij bijvoorbeeld 0,65 op 1/N3 vinden we 1,539 op N3 en 1,87 op D. Dat betekent $\log 0,65 = -0,187 = \operatorname{colog} 1/0,65 = \operatorname{colog} 1,539 = 9,813 - 10$. Omdat Amerikanen geen 0 voor de decimale punt zetten, maar die 0 wel meedoet bij het 10-complement, voorkomt de notatie 9.Co.–10 dat we deze 9 vergeten.

De notatie 9.9Co.–10 bij schaal 1/N2 heeft dezelfde functie. Bij bijvoorbeeld 0,95 op 1/N2 vinden we 1,053 op N3 en 2,23 op D. Dus $\log 0,95 = -0,02\,23 = \operatorname{colog} 1,05\,3 = 9,97\,77 - 10$.

De twee nullen in de mantisse vervangen we door twee negens!

Als we bijvoorbeeld de log van 0,9955 op schaal N1 berekenen, lezen we 1,96 af op schaal D. We lezen daar feitelijk de mantisse 0,00 196. Het 10-complement is 9,99 804, de log is dus 9,99 804 – 10. De notatie 9.99Co.–10 bij schaal 1/N1 laat zien dat we de drie linker nullen moeten complementeren.

Cologaritme van een getal kleiner dan 1.

In bovenstaande voorbeelden berekenden we de colog van een getal groter dan 1 op één van de vier N-schalen, maar wat is de colog van een getal kleiner dan 1? Het antwoord vinden we door de functie van log en colog te verwisselen. Zo is log 0,1234 = 9,09 132 – 10 en dus colog 0,1234 = 0,90 868. De log heeft nu de term –10 en de colog niet.

1-complementaire mantissen op L van rekenlinialen

Omdat we op schaal D van rekenlinialen de numeri van 1 tot 10 vinden, bevat schaal L de mantissen, waarbij we de 0 voor de komma weglaten; we gebruiken dus geen 10- maar 1-complementen. Zo is log 6 = ,778. De colog van 6 is: colog 6 = log 1/6 = –,778 = (1 – ,778) – 1 = ,222 – 1. De mantisse in de colog is het 1-complement van de mantisse van de ermee corresponderende log. De schaallengte rechts van ,778 op L is het 1-complement van ,778, dus ,222, de complementaire mantisse.

Deze complementaire mantisse op L vinden we tevens onder de 6 van CI, of door de schuif uit de liniaal te halen en er onderste boven weer in te zetten.

Verder zien we: als het product van twee getallen van D gelijk is aan 10, dan zijn de twee mantissen elkaars 1-complement. Bijv. log 2 = ,301 03 en log 5 = ,698 97. Zie [4], p. 9.

Nut van cologaritmen?

Wat is eigenlijk het nut van cologaritmen? Door middel van cologaritmen kunnen we een deling omzetten in een optelling. Ook in [2] en in [5] is dit de enige toepassing van cologaritmen die wordt vermeld.

Als voorbeeld berekenen we $\frac{3,867 \times 203,39}{0,0004165 \times 17,34}$, maar maken, om met 4 significante cijfers te kunnen rekenen, gebruik van een logaritmetafel in plaats van een rekenliniaal. Zie tabel 1. Als we dezelfde berekening met de rekenliniaal uitvoeren, kunnen we ook niet ontkomen aan de optelling. Met de Pickett Model 3 is het vinden van cologaritmen eenvoudig, maar het meest tijdrovende deel van de berekening is de optelling, die vroeger voornamelijk met de hand moest worden uitgevoerd. Het is de vraag of het gebruik van cologaritmen een significant voordeel oplevert.

Conclusies

De cologaritme van een getal *x* is de tegengestelde van de logaritme van *x*, oftewel de logaritme van 1/*x*.

Cologaritmen kunnen worden bepaald door toepassing van 1- of 10-complementen. De Co-aanduidingen bij de vier 1/N-schalen van de Pickett Model 2 en Model 3, verwijzen naar deze complementen.

Het nut van cologaritmen vinden we (mogelijk) bij delingen. Door het gebruik van cologaritmen kan een deling geheel beschreven worden als een sommatie. Daar staan de kosten tegenover van een extra begrip (cologaritme) en noodzakelijke bekendheid met 1- en 10-complementen. Bij grotere delingen, met meerdere factoren in de noemer, lijkt de optelling van alle cologaritmen en alle logaritmen iets sneller te gaan, maar het voordeel lijkt minimaal.

factor	logaritme				wijzer
factor	mantisse	wijzer			
3,867	0,58 737	0	log =	0,58 737	
203,39	0,30 833	2	log =	2,30 833	
0,0004165	0,61 962	-4			
	6,61 962	-10	colog =	3,38 038	
17,34	0,23 905	1	colog =	8,76095	-10
			Som =	15,03 703	-10
				5,03 703	
				0,03 703	5
			Quotiënt =	1,089	5
				$1,089 \cdot 10^5$	

Tabel 1: Een deling met meerdere factoren

Acknowledgements

I wish to thank all those members of the International Slide Rule Group ISRG that contributed to the discussion on cologarithms, December 2014: Dave Brown, Trev Dewey, Marion Moon, Cyron Lawson, Steve Treadwell, Maynard Wright and Ed Zarius.

Referenties

[1] Lovett, R, website http://sliderules.lovett.com/, *Herman's Archive*, match number 5023, Pickett Model 3, used in this article with courtesy of Rod Lovett.

[2] Abramowitz, M, and Stegun, I.A, *Handbook of Mathematical Functions*, p. 89, Dover Publications Inc., Mineola, N.Y. 11501, 9th edition, 1972.

[3] Hedrick, E.R., *The MacMillan Logarithmic and Trigonometric Tables*, The Macmillan company, New York, 1941, §8, p. xii.

[4] Wijdenes, P, *Nordhoff's Wiskundige Tafels in 5 decimalen*, 7e druk, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[5] Hartung, M.L, *How to use the Deci Log-Log Slide Rule Pickett Model no.3*, p. 35-36, Pickett & Eckel Inc, Alhambra, Cal, 1947. Digital copy on the website of the International Slide Rule Museum, used in this article with courtesy of Mike Konshak.