Kunnen we (nog) van de logaritme af?

Simon van der Salm

In het *jaar van Napier* (400 jaar geleden publiceerde hij zijn *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*) is deze vraag natuurlijk een beetje vloeken in de kerk. Toch hoort de wiskundeleraar deze vraag niet alleen van zwakke leerlingen, die worstelen met het logaritmebegrip; ook de wat sterkere leerlingen merken wel eens op: "Als een logaritme een exponent is, waarom noemt men die dan *logaritme* en niet *exponent*?". Dat is helemaal niet zo'n vreemde vraag als men in eerste instantie geneigd is te denken. Dit stukje gaat op deze vraag in.

We beginnen met de meest gebruikelijke wijze waarop het logaritmebegrip op school wordt geïntroduceerd: de g-logaritme van x is de *exponent* y waartoe we het grondtal g moeten verheffen om x te krijgen.
In formulevorm: ${}^{g}\log x = y \leftrightarrow x = g^{y}$.
Natuurlijk is daar niets mis mee, de logaritmische functie is gewoon de inverse van de exponentiële functie. Maar bij nadere beschouwing roept de gebruikte terminologie toch vragen op.

Vragen

Vraag 1: Het getal g is het grondtal van de macht g^{y}, waarom staat g in de notatie van de logaritme dan op de plaats van een exponent? Deze notatie van Crelle (1) is een typisch Nederlands verschijnsel; buiten ons land is hij niet of nauwelijks in gebruik. Internationaal gebruikt men $\log_g x$. in die notatie heeft het grondtal de nederige positie die het toekomt.

Vraag 2: Logaritmen zijn exponenten. Waarom zouden we niet gewoon schrijven $\exp_g x$ in plaats van $\log_g x$? Worden daardoor allerlei regels voor het rekenen met logaritmen niet veel inzichtelijker? Het antwoord zien we in het volgende voorbeeld.
Als je twee machten met hetzelfde grondtal met elkaar vermenigvuldigt, worden de exponenten bij elkaar opgeteld: $g^{a} \cdot g^{b} = g^{a+b}$. De exponent van het product is de som van de exponenten. Stelt men $A = g^{a}$ en $B = g^{b}$, dan zien we $\log_g (A \cdot B) = \log_g A + \log_g B$. Maar als we het woord *log* vertalen door *exp* ziet men duidelijkere uitdrukking: $\exp_g (A \cdot B) = \exp_g A + \exp_g B$. Uit $g^{a} \cdot g^{b} = g^{a+b}$ volgt immers dat de exponent van het product de som is van de exponenten.
Zo kunnen we alle regels voor logaritmen formuleren als regels voor exponenten:

Definitie: $A = g^{a}; B = g^{B} \leftrightarrow a = \exp_g A; b = \exp_g B$

Gevolg 1 van definitie: $\exp_g A = \exp_g g^{a} = a$ en $\exp_g B = \exp_g g^{b} = b$

Gevolg 2 van definitie: $g^{\exp_g A} = A$ en $g^{\exp_g B} = B$

Productregel: $g^{a} \cdot g^{b} = g^{a+b} \leftrightarrow \exp_g (A \cdot B) = \exp_g A + \exp_g \mathrm{B}$

Quotientregel: $\dfrac{g^{a}}{g^{b}} = g^{a-b} \leftrightarrow \exp_g (\dfrac{A}{B}) = \exp_g A - \exp_g B$

Machtsverheffen: $A^{c} = (\mathrm{g}^{a})^{c} = g^{a \cdot c} \leftrightarrow \exp_g A^{c} = c \cdot \exp_g A$

Grondtalverandering: $\exp_g A = \dfrac{\exp_p A}{\exp_p g}$

Mocht de lezer dit vreemde formules vinden: alleen het gebruikelijke woord *log* is hier vervangen door het woord *exp*.

<u>Vraag 3</u>: Het (ongebruikelijke) formuleren van bovenstaande rekenregels in termen van *exp* lijkt veel meer doorzichtig dan in termen van *log*. Het woord logaritme is daardoor overbodig geworden. Waarom gebruiken we eigenlijk het woord *logaritme*?
Vermoedelijk heeft het antwoord te maken met de wijze waarop de eerste gebruikers van logaritmen (Napier, Briggs, Vlacq, De Decker) in de 16^e^ en 17^e^ eeuw, logaritmen niet opvatten in termen van machten en exponenten. Het werken met machten van grondtal en exponent werd pas zo'n 100 jaar later begrepen, met name door het werk van Euler. Zie (2). John Napier bijvoorbeeld, vond de methode waarmee vermenigvuldigen kon worden vertaald in optellen (zie bovenstaande productregel), maar hij bracht de correspondentie tussen die twee rekenkundige bewerkingen tot stand door middel van een grafische techniek met twee getallenassen. Eén as had de gewone rekenkundige indeling (een as met steeds dezelfde, uniforme, afstand tussen twee opeenvolgende getallen) en één as had een steeds kleinere afstand tussen opeenvolgende getallen, die we nu een logaritmische schaal noemen. In zijn behandeling van het logaritmebegrip kwam geen macht, geen grondtal en geen exponent voor. Met onze moderne ogen zien we dat deze begrippen wel degelijk een rol spelen: $x = a \cdot \left(e^{-a}\right)^{y} \leftrightarrow y = \text{Nep.}\log x$ met $a = 10^7$. Zie (2)

<u>Vraag 4</u>: Waarom gebruiken we *logaritmische schaal* voor de verkeerde schaal?

Het feit doet zich voor dat de machten $x = g^y$ een meetkundige rij, met factor (rede) *g* vormen langs de *x*-as en de logaritmen van *x*, dus de getallen *y*, een rekenkundige rij langs de *y*-as. Het vreemde is dat we niet de *y*-as met logaritmen van *x*, *logaritmische as* noemen, maar de *x*-as met de machten van het grondtal *g*, namelijk de getallen $x = g^y$. Die *x*-as zou eigenlijk exponentiële of machtsschaal moeten heten, maar een betere benaming is *meetkundige schaal*. De schaal met de logaritmen zou dan *rekenkundige schaal* kunnen worden genoemd.

<u>Vraag 5</u>: Waarom wordt het woord *antilogaritme* gebruikt?
Steeds meer Nederlandse studenten werken met Amerikaanse literatuur, waarin dit woord gebruikt wordt. De antilogaritme met grondtal *g* is de inverse van de logaritme met het grondtal *g*, dus feitelijk de exponentiële functie met grondtal *g*.

In $\log_g x = y \leftrightarrow x = g^y$ is *y* de *g*-logaritme van *x*, en *x* dus de *g*-antilogaritme van *y*: $x = \text{antilog}_g\, y$.

Ook het gebruik van dit woord *antilogaritme*, in plaats van een macht met grondtal en exponent doet denken aan het feit dat logaritmen niet gezien worden als exponenten van een grondtal. Net zoals het woord logaritme is het woord antilogaritme feitelijk overbodig.

Conclusies

Waarom blijven we het woord *logaritme* gebruiken? Vermoedelijk is het prozaïsche antwoord: omdat we het zo gewend zijn en het veel te veel inspanning zou kosten om over te gaan op een ander woord.

Afsluitende opmerking

Welk woord we ook gebruiken, in verband met logaritmen is de relatie tussen een meetkundige schaal (met een meetkundige rij van machten van *g*) en een rekenkundige schaal essentieel. Essentieel is daarbij het inzicht dat de meetkundige schaal met de rekenoperaties vermenigvuldigen/delen te maken heeft en de rekenkundige schaal met optellen/aftrekken.
De schaal van Richter (magnitudes van 0 tot 10) bijvoorbeeld, is niet te begrijpen als men niet weet dat op de achtergrond een meetkundige schaal voor de vrijgekomen hoeveelheid energie bij aardbevingen een rol speelt. Het grondtal voor die meetkundige schaal is $10 \cdot \sqrt{10} \approx 31,6$. Als de magnitude met 1 toeneemt, is de hoeveelheid vrijgekomen energie een factor 31,6 groter. Vandaar dat een aardbeving van magnitude 6 enorm veel meer schade veroorzaakt dan een aardbeving van magnitude 5.

Referenties

(1) F. Cajori, A History of Mathematical Notations, 1929, paragraaf 471.
(2) D.J. Struik, Geschiedenis van de Wiskunde, 1977, blz. 112 – 113.