

Dit is de rekenschijf voor blokkeringskansen, die ik vorig jaar vermeldde in MIR 46, op pagina 23. Echter de fabrikant van dit exemplaar was niet mijn toenmalige werkgever Philips, maar een van onze concurrenten: Ericsson.



### Beschrijving

De Erlang schijf is bedoeld om blokkeringskansen te bepalen voor telefooncentrales in de tweede helft van de vorige eeuw. De volgende variabelen worden gebruikt:

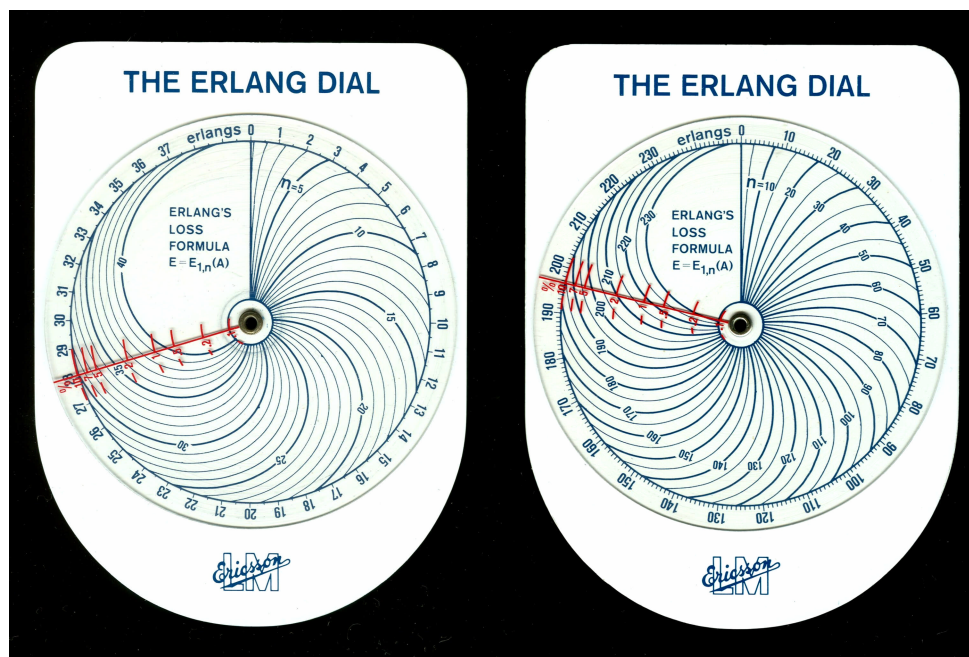
- ? A is het verkeersaanbod uitgedrukt in Erlang
- ? n is het aantal beschikbare lijnen om het verkeer A te verwerken
- ?  $E_{1,n}(A)$  is de blokkeringskans (ook wel met B aangegeven) in procenten, volgens Erlang's eerste formule  $E_1$  (deze kans werd ook wel eufemistisch de "Grade of Service" genoemd)

De drie variabelen worden respectievelijk getoond op de cirkelvormige vaste buitenschaal (A in Erlangs), de rode indexschaal ( $E_1$  in %) op de draaiende transparante schijf en een polair bundelnomogram (n) op het vaste deel. Elk van de variabelen kan bepaald worden als de andere twee bekend zijn. De ene zijde van de schijf (links in onderstaande figuur) is bedoeld voor laag verkeer tot 39 Erlang, de andere zijde gaat tot 250 Erlang.

Het instrument behoort tot de klasse van analoge en grafische "schuifkaarten" (slide charts).

Het is op eenvoudige wijze vervaardigd uit twee transparante perspex schijven, die door middel van een holnietje onafhankelijk draaiend zijn verbonden met de witte PVC basiskaart: totale dikte is  $2 \times 0,055 + 1,1 = 2,2$  mm zonder holniet (3,3 mm inclusief holniet).

De diameter van het holnietgat is geschat op 3 mm; dit is van belang omdat deze gatdiameter de oorspronkelijke fabricage van de schijf door de firma ALRO in Nederland uitsluit (ALRO heeft namelijk slechts 2 gatdiameters gebruikt voor zijn PVC rekenschijven: eerst 5 mm, en na 1955 ook 2 mm). Hoogte en breedte van het geheel is 110,4 x 82,3 mm. De schijf heeft een diameter van 78,2 mm.



### Herkomst

De Zweedse firma "Telefonaktiebolaget L M Ericsson" (zie het logo in bovenstaande figuur) is in 1876 gesticht door Lars Magnus Ericsson in Stockholm. In het begin richtte Lars zich op productie van telefoontoestellen, met draaischijf, maar al snel werd het gebied verbreed tot alle onderdelen van de telecommunicatie-infrastructuur. L M Ericsson (LME) is momenteel een van de grote spelers in mobiele telefonie. Na het eind van de tweede wereldoorlog concurreerde LME in Nederland onder anderen met Philips Telecommunicatie Industrie (PTI) op het gebied van automatische telefooncentrales.

Terwijl PTI de klassieke roterende kiezer verder ontwikkelde, trok LME de aandacht met aparte ontwerpen zoals de "pannekoek"-schakelaar met 25 x 20 uitgangen, en de crossbar- en code-switch. PTI heeft voor klanten in de 70'er jaren een Erlang rekenschijf gemaakt, waar helaas geen exemplaar meer van bekend is (tot nu toe). Maar LME had dus een vergelijkbaar rekenhulpmiddel, zoals bleek uit een reactie op mijn interview over rekenlijnen in de Nedlloyd Pensioenkrant van januari 2008.

### Principe

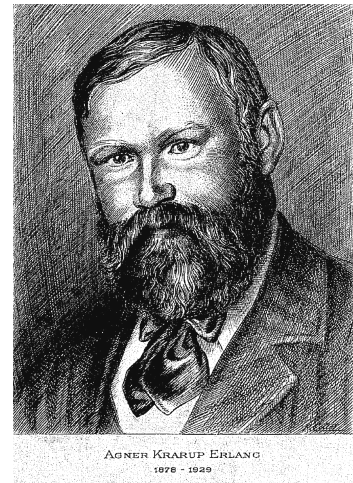
In de electromechanische automatische telefooncentrales, die gebruikelijk waren rond het midden van de vorige eeuw, werd een telefoonoproep door een aantal kiesstrappen geleid, met behulp van het "gedraaide" nummer. Om te beginnen werd een groep van individuele telefoonaansluitingen, elk maar voor gemiddeld 1 % van de tijd in gebruik, "gereduceerd" tot een kleiner aantal lijnen met een hoger verkeersrendement. Hiervoor werden zogenaamde oproepzoekers of voorkiezers gebruikt, of meertraps schakelmatrixen, nog voordat zelfs de kiestoon gegeven werd vanuit een speciaal circuit, zie ref. [1]. In deze reductietrap kon het dus voorkomen dat alle circuits achter de reductietrap bezet waren en er nog een nieuwe telefoonoproep aankwam, omdat abonnees in de groep op willekeurige momenten bellen, onafhankelijk van elkaar. Dit werd blokkering of congestie genoemd.

Blokkering kon ook optreden op telefoonverbindingen tussen steden. Voordat modernere transmissietechnieken bestonden, werden steden verbonden door telefoonkabels met een bundel lijnen (koperen dubbeladers), die elk één gesprek tegelijk konden voeren. Het voorspelde verkeer tussen twee steden bepaalde het benodigde aantal lijnen, en ook hierbij bood de Erlang schijf hulp.

De kansrekening voor deze situaties is uitgewerkt door de Deense wiskundige A. K. Erlang (1878 – 1929), een academicus die ook heeft gewerkt voor de Copenhagen Telephone Company Ltd, zie ref. [2]. Hij legde met zijn werk de grondslag voor de telefoonverkeerstheorie, met als meest bekende voorbeeld de formule voor de blokkeringskans op onze rekenschijf. Deze is naar hem genoemd: de Erlang-B formule.

Ook is de verkeerseenheid "Erlang" in 1946 door de ITU (International Telecommunications Union) naar hem vernoemd, een dimensieloze eenheid (geen SI-eenheid), die een verkeerswaarde uitdrukt in het gemiddeld aantal bezette lijnen: bijvoorbeeld, één enkele lijn kan een verkeer van 1 Erlang verwerken.

Sinds Erlang's tijd is het gebied uitgegroeid tot de wiskundige discipline "wachttijdtheorie" (queuing theory), met gebruikmaking van bijvoorbeeld stochastische processen (uitgebreide kansrekening) en Laplace-Stieltjes transformaties. Wachttijdtheorie kan worden toegepast op de meest diverse gebieden, variërend van loketsystemen of toiletten, tot berekeningen aan door regen gevoede stuwmeren.



AGNER KRARUP ERLANG  
1878 - 1929

### Gebruik van de Erlang schijf

Stel dat midden vorige eeuw een nieuwe telefoonkabel moest worden gelegd tussen twee middelgrote steden. Meestal bestonden er resultaten van landelijke verkeersmetingen tijdens het "drukke uur", welke gebruikt werden om het verkeer tussen de twee steden te schatten. Er werd een groeifactor toegepast, gebaseerd op ontwikkelingsplannen van de betreffende steden en algemene trends, waaruit (voor ons voorbeeld) een verkeersverwachting van 197 Erlang resulteerde. De index van de Erlang schijf werd op de buitenschaal naar de waarde 197 gedraaid.

A in Erl

N	B												
	0.01%	0.02%	0.03%	0.05%	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.5%	0.6%	0.7%	0.8%	0.9%
200	156.2	158.7	160.3	162.5	165.6	169.2	171.4	173.2	174.6	175.9	177.0	178.0	178.9
202	158.0	160.5	162.1	164.3	167.5	171.0	173.3	175.1	176.5	177.8	178.9	179.9	180.8
204	159.7	162.3	164.0	166.1	169.3	172.9	175.2	177.0	178.4	179.7	180.8	181.8	182.8
206	161.5	164.1	165.8	167.9	171.2	174.8	177.1	178.9	180.4	181.6	182.7	183.8	184.7
208	163.3	165.9	167.6	169.8	173.0	176.6	179.0	180.8	182.3	183.5	184.7	185.7	186.6
210	165.1	167.7	169.4	171.6	174.8	178.5	180.9	182.7	184.2	185.4	186.6	187.6	188.6
212	166.9	169.5	171.2	173.4	176.7	180.4	182.7	184.6	186.1	187.4	188.5	189.5	190.5
214	168.7	171.3	173.0	175.2	178.5	182.2	184.6	186.5	188.0	189.3	190.4	191.5	192.4
216	170.5	173.2	174.8	177.1	180.4	184.1	186.5	188.4	189.9	191.2	192.3	193.4	194.4
218	172.3	175.0	176.6	178.9	182.2	186.0	188.4	190.2	191.8	193.1	194.3	195.3	196.3
220	174.0	176.8	178.5	180.7	184.1	187.8	190.3	192.1	193.7	195.0	196.2	197.2	198.2
222	175.8	178.6	180.3	182.6	186.9	190.7	192.2	194.0	195.6	196.9	198.1	199.2	200.2
224	177.6	180.4	182.1	184.4	188.7	191.6	194.1	195.9	197.5	198.8	200.0	201.1	202.1
226	179.4	182.2	183.9	186.2	190.5	193.5	195.9	197.8	199.4	200.8	202.0	203.0	204.0
228	181.2	184.0	185.7	188.1	191.5	195.3	197.8	199.7	201.3	202.7	203.9	205.0	206.0
230	183.0	185.8	187.6	189.9	193.3	197.2	199.7	201.6	203.2	204.6	205.8	206.9	207.9

1.0%	1.2%	1.5%	2%	3%	5%
179.7	181.3	183.3	186.2	190.9	198.5
181.7	183.2	185.2	188.1	192.9	200.6
183.6	185.2	187.2	190.1	194.9	202.7
185.5	187.1	189.2	192.1	196.9	204.7
187.5	189.1	191.1	194.1	199.0	206.8
189.4	191.0	193.1	196.1	201.0	208.9
191.4	193.0	195.1	198.1	203.0	211.0
193.3	194.9	197.0	200.0	205.0	213.0
195.2	196.9	199.0	202.0	207.0	215.1
197.2	198.8	201.0	204.0	209.1	217.2
199.1	200.8	202.9	206.0	211.1	219.3
201.1	202.7	204.9	208.0	213.1	221.4
203.0	204.7	206.8	210.0	215.1	223.4
204.9	206.6	208.8	212.0	217.1	225.5
206.9	208.6	210.8	213.9	219.2	227.6
208.8	210.5	212.8	215.9	221.2	229.7

Onder de haarlijn kon voor elke blokkeringskans worden afgelezen op de n-curves, hoeveel lijnen in de kabel nodig zouden zijn. Bijvoorbeeld 210 lijnen voor  $E_1 = 2\%$ , of 230 lijnen voor  $E_1 = 0,2\%$ . Wanneer we deze uitkomst vergelijken met de onderstaande nauwkeurigere tabel uit ref. [3], blijkt dat de aflezingsfout van de schijf binnen  $1\%$  ligt.

Bij dimensionering van moderne telecommunicatienetwerken is de rol van de Erlang verliesformule minder belangrijk geworden. Er werd gaandeweg meer gebruik gemaakt van blokkeringsvrije netwerken en van herroutering in geval van congestie in bepaalde netwerkdelen. Ook blijkt het vaak economisch meer lonend om een grote initiële overcapaciteit te bouwen dan om dure upgrades te installeren in een operationeel netwerk.

Met de komst van internet telefonie is de situatie weer anders geworden: IP-pakketten worden wereldwijd zo flexibel gerouteerd dat er nauwelijks meer sprake van tussenliggende congestie kan zijn, wel van congestie wereldwijd, of juist aan de rand van het internet naar de gebruiker toe. Verder is de directe weigering van een gesprek door blokkering ("verliesstelsel") veelal vervangen door wachtsystemen die bezettingpieken efficiënter kunnen uitsmeren over de tijd (al zal de klant dat vaak anders zien). Toch is de rol van de Erlang formule nog niet uitgespeeld. Er zijn tal van andere toepassingen dan telefonie, waar dimensioneren met een blokkeringskans nuttig kan zijn.

### Praktische toepassing: planning van toiletten

Stel, we willen voor een nieuw kantoorgebouw bepalen hoeveel toiletten er nodig zijn.

We nemen aan dat de bezetting van het gebouw uit 1000 mensen bestaat. Andere aannames zijn dat elke persoon gemiddeld 3 bezoeken aan het toilet willekeurig over de 8-urige kantoor dag verdeelt, en dat elk bezoek gemiddeld 5 minuten duurt.

Dit betekent dat elk een "toiletverkeer" genereert van een kwartier per 8 uur, dus  $\frac{1}{4} : 8 = 0,0313$  Erlang. Het totale toiletverkeer is dus 31,3 Erlang. Als we een kans van  $2\%$  toestaan dat iemand alle toiletten bezet aantreft, geeft de Erlang schijf aan dat er 40 toiletten nodig zullen zijn.

Dit resultaat moet wel met de nodige omzichtigheid gehanteerd worden, want toiletbezoek is natuurlijk niet volledig "random", maar concentreert zich op tijden als aankomst, koffie en lunch pauzes etc.

Bovendien voldoet dit voorbeeld niet helemaal aan het Erlang model, omdat men in het algemeen zal wachten voor een bezet toilet: de Erlang verlies-formule neemt aan dat de toiletbezoeker het onmiddellijk opgeeft bij een bezet toilet.

### Wiskundige achtergrond

De Erlang-B formule geldt onder de volgende voorwaarden:

1. Verkeer wordt aangeboden aan een volledig toegankelijke bundel van N lijnen zonder wachtruimte: dit wordt een "verlies"-systeem genoemd
2. Gespreksduren (houdtijden) zijn "random" volgens de negatief-exponentiële kansverdeling met gemiddelde waarde h: de kans dat een gesprek korter duurt dan t, is  $1 - e^{-t/h}$
3. Gesprekken beginnen op "random" tijdstippen: tijden tussen opeenvolgende beginpunten van gesprekken volgen ook de negatief-exponentiële kansverdeling, met gemiddelde waarde c: de kans dat een gesprek minder dan t na de start van het vorige gesprek begint, is  $1 - e^{-t/c}$ ; dit is equivalent aan een Poissonverdeling voor de begintijdstippen van gesprekken
4. Het systeem is in statistisch evenwicht, hetgeen wil zeggen dat effecten van plotselinge veranderingen in verkeersintensiteit zijn uitgewerkt

De verkeerswaarde is dan  $A = h/c$  (bijvoorbeeld  $A = 1$  Erlang, als gesprekken met een houdtijd van 1 minuut elke minuut arriveren, of elke 5 minuten met een houdtijd van 5 minuten).

Na uitschrijven van alle overgangskansen in een infinitesimaal kleine tijd voor een bezetting k (een zogenaamd "geboorte- en sterfte proces"), kan in de limiet afgeleid worden dat de kans op precies k bezette lijnen (voor  $k = 0, 1, \dots, N$ ) gelijk is aan:

$$\Pr\{k\} = \frac{A^k}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

Dit is de Erlang-verdeling, die we als een getrunceerde Poissonverdeling kunnen beschouwen: in de limiet  $N \rightarrow \infty$  gaat hij over in de normale Poissonverdeling.

De blokkeringskans B van deze bundel van N lijnen is de kans dat alle N lijnen bezet zijn:

$$B \approx E_{1,N}(A) \approx \Pr\{N\} \approx \frac{A^N}{N!} \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Voor deze formule was de Erlang schijf ontworpen. In een tijdperk dat programmeerbare calculators zoals de HP-65 en HP-67 nog traag werkten in grote iteratielussen (N maal), boden alleen grafieken, tabellen of deze Erlang schijf een handzame oplossing voor het berekenen van blokkeringskansen.

### Tot slot

Dit is een voorbeeld van de vaak interessante achtergronden die kunnen schuilen achter een ogenschijnlijk simpel en goedkoop geproduceerd schuifkaartje voor een specialistische toepassing. Er kan een verhaal achter schuilen over een firma, een industrietak, een technologie of een rekenformule. De laatste jaren zijn artikelen gepubliceerd, bijvoorbeeld door Tom Wyman en door John Kvint, zie [4] en [5], waarin het belang van dit soort schuifkaarten voor verzamelaars wordt benadrukt. De tienduizenden specialistische schuifkaarten die ooit ontworpen zijn (en nog steeds worden!), kunnen een veel breder beeld geven van ons technisch-cultureel erfgoed dan de momenteel meer bekende kwaliteitsrekenlinialen voor algemene doeleinden. Hopelijk zullen nog vele artikelen worden geschreven over schuifkaarten voor speciale toepassingen.

### Referenties

- [1] Hemert, D. van, "Automatische Telefonie", Ver. Electrotechn. Ambtenaren der Telegrafie en Telefonie, "s-Gravenhage, 4<sup>e</sup> druk 1948
- [2] Brockmeyer, E., Halstrøm, H.L., Jensen, A., "The Life and Works of A.K. Erlang", Trans. Dan. Acad. Techn. Sci. No. 2, Kopenhagen, 1948
- [3] Siemens Aktiengesellschaft, "Tabellenbuch Fernverkehrstheorie Teil 1 – Telephone Traffic theory Tables and Charts Part I", Berlin – München, 1970
- [4] Wyman, Th., "Slide Chart Calculators – A Modest Proposal", Journal of The Oughtred Society, 13:1, Spring 2004, p. 6
- [5] Kvint, J., "Slide-Charts and Slide-Charts Collecting", Proceedings IM2007, Lelystad/Enkhuizen, Sept. 2007, p. 79



*De redactie wenst alle lezers graag  
fijne Kerstdagen 2008 een een  
voorspoedig en gezond 2009.*